Über gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flächen höherer Ordnung.

Von Phil. Dr. **Anton Puchta,**
a. o. Professor an der deutschen Universität in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1883.)

Ich beabsichtige in der vorliegenden Abhandlung eine Reihe von Sätzen über gewisse Curven und Flächen höherer Ordnung zu geben, zu deren Kenntniss ich im Wintersemester 1883 gelangte, und glaube hinzufügen zu sollen, dass ich die weitere Fortsetzung in der Untersuchung dieser Curven und Flächen später zu geben gedenke und mir desshalb vorbehalte, so dass dieser Aufsatz als erster Theil einer zusammenhängenden Arbeit aufzufassen ist.

I.

Analytische Definition der Curven und Flächen und Lösung ihres Tangentenproblems in einem Punkte derselben.

In meinen Vorlesungen über höhere Analysis an der Prager deutschen Universität im Wintersemester 1883 gab ich in der Einleitung die Roberval'sche Lösung des Tangentenproblems bei der Ellipse. Dieselbe kann, wenn Fig. 1 die beiden Brennpunkte durch 1 und 2 gegeben sind und $2a$ die grosse Achse derselben ist, etwa dahin ausgedrückt werden, dass man in Bezug auf die analytische Gleichung

$$r_1 + r_2 = 2a$$

sagt: Die Bewegung des Punktes M der Ellipse zu dem unendlich nahen Punkte M' erfolgt derart, dass r_1 und r_2 absolut genommen um dieselbe unendlich kleine Grösse zunehmen, welche jedoch bei r_1 z. B. $+$, bei r_2 negativ ist und darum geht, wenn MN, resp. MN' diese Zunahmen sind, die Bewegung von M nach M' in der

Richtung der Diagonale des Parallelogramms $NMN'M'$ vor sich, und halbirt die Tangente an die Ellipse in M bekanntlich den Nebenwinkel von r_1 und r_2. Diese Überlegung Roberval's veranlasste mich zu dem Problem:

„Bei welchen Curven existirt eine analoge Lösung des Tangentenproblems?“ zugleich mit Beachtung der Frage:

„Wie lässt sich die bekannte Fadenconstruction der Ellipse verallgemeinern?“

Ich gelangte unmittelbar, durch blosse Analogie, zur Lösung dieser Probleme. Nimmt man nämlich n Punkte 1, 2,. n durch ihre rechtwinkligen Coordinaten

$$x = a_i$$
$$y = b_i,$$

wobei $i = 1, 2, 3, . \quad n$ ist, als gegeben an und setzt

$$r_i = \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2},$$

so gestatten die Curven

$$r_1 + r_2 + r_3 + . \quad . + r_n = Cst, \tag{1}$$

worin n eine ganz beliebige positive ganze Zahl ist, eine analoge Lösung des Tangentenproblems. Aus 1) folgt nämlich durch Differentiation

$$\Sigma \frac{x-a_i}{r_i} + \frac{dy}{dx} \Sigma \frac{y-b_i}{r_i} = 0,$$

wobei sich die Summation auf $i = 1, 2, 3, . \quad n$ bezieht, und man hat daher aus der letzten Gleichung, wenn α_i den Winkel von r_i mit der x-Achse und β den der Normale mit derselben Geraden bezeichnet, da $\frac{x-a_i}{r_i} = \cos\alpha_i$, $\frac{y-b_i}{r_i} = \sin\alpha_i$ ist,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Sigma \sin\alpha_i}{\Sigma \cos\alpha_i}$$

und damit offenbar nach einem bekannten Satze der analytischen Mechanik folgende Lösung des Tangentenproblems in einem Punkte x, y der Curve 1).

„Um die Normale und damit die Tangente in einem beliebigen Punkte der Curve 1) zu finden, verlängere man sämmtliche Radienvectoren über M hinaus, also in positiver Richtung, um beliebige, aber überall gleiche Strecken, z. B. um die Längeneinheit, und betrachte diese Verlängerungen als Componenten. Ihre durch das Kräftepolygon gefundenen Resultate gibt die Richtung der Normalen in diesem Curvenpunkte."

Es erhellt sofort, dass die Ellipse genau dieselbe, nur jetzt verallgemeinerte Lösung gestattet, nur muss man von der Normale und nicht von der Tangente ausgehen.

Es ergibt sich aber sofort eine weitere Verallgemeinerung. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, .\ \ \ \nu$ beliebige reelle, rationale oder irrationale Zahlen, deren Construction auf geometrischem Wege möglich ist, so kann man an Stelle der Curven 1) auch die durch 2) definirten setzen

$$\pm \alpha r_1 \pm \beta r_2 \pm \gamma r_3 \pm .\ \ .\pm \nu r_n = \text{Cst} \tag{2}$$

und genau in derselben Weise für 2) die Normale mittelst des Kräftepolygons construiren, nur hat man die Radienvectoren in positivem oder negativem Sinne um $\alpha, \beta, .\ \ \ \nu$ Einheiten respective zu verlängern etc., da bei der Differentiation von 2) sich nichts Wesentliches ändert.

Der Ubergang zu den Flächen bietet sich jetzt von selbst dar. Sind nämlich in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume n Punkte durch ihre Coordinaten $x = a_i$, $y = b_i$, $z = c_i$ gegeben, wobei $i = 1, 2, 3, .\ \ \ n$ ist und setzt man

$$\rho_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2},$$

so besitzen die Flächen

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n = \text{Cst} \tag{3}$$

genau dieselbe Normalconstruction. Denn aus der letzten Gleichung folgt durch partielle Differentiation

$$\Sigma \frac{x - a_i}{\rho_i} + \frac{\partial z}{\partial x} \Sigma \frac{z - c_i}{\rho_i} = 0 \quad \Sigma \frac{y - b_i}{\rho_i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Sigma \frac{z - c_i}{\rho_i} = 0,$$

also

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \Sigma \cos\alpha_i : \Sigma \cos\beta_i : \Sigma \cos,\gamma_i$$

wobei $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ die Winkel von ρ_i mit den drei Coordinatenachsen und $\alpha \beta \gamma$ die der Normalen mit denselben Achsen bedeutet. Daraus resultirt die Regel:

„Um für die Flächen 3) in einem beliebigen Punkte die Normale zu construiren, verlängere man sämmtliche Radienvectoren ρ_i im positiven Sinne um die Längeneinheit und setze diese Verlängerungen zu ihrer Resultante zusammen. Die letztere gibt dann die Richtung der Normale der Fläche in diesem Punkte und die zu ihr durch diesen Punkt senkrecht gelegte Ebene daher die Tangentialebene."

Dass an Stelle der Flächen 3) die durch 4) definirten Flächen

$$\pm \alpha \rho_1 \pm \beta \rho_2 \pm \gamma \rho_3 \pm \ldots \pm \nu \rho_n = \text{Cst} \qquad 4)$$

treten können etc., ist unmittelbar klar. Damit ist also in der That die Roberval'sche Lösung für gewisse Curven und Flächen höherer Ordnung verallgemeinert und bemerke ich hier nur noch, dass die Lösung des Tangentenproblems auch ohne jede Rechnung durch mechanische Überlegungen hätte gegeben und bewiesen werden können, was ich jedoch übergehe.

II.

Construction der Curven und Flächen. Die nächste Frage, deren Behandlung vorliegt, ist offenbar die nach der Construction derartiger Gebilde. Es wird genügen, wenn ich mich auf die Curven allein beschränke, da sich die betreffenden Ergebnisse sofort auf die Flächen übertragen lassen. Was nun die Construction der erwähnten Curven anbelangt, so kann dieselbe z. B. bei

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm \ldots \pm r_n = a \qquad \alpha)$$

entweder recurrent oder direct erfolgen. Denn die Totalität der Schnittpunkte von den beiden Curven β) und γ)

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm \ldots \pm r_{n-1} = a - z \qquad \beta)$$

$$\pm r_n = z, \qquad \gamma)$$

worin z ein veränderlicher Parameter ist, ist offenbar mit der Curve α) identisch, und hiedurch ist die Construction von dem Falle n auf den $n-1$ reducirt, also allgemein als gelöst zu betrachten. Es ist dabei zu beachten, dass bei dieser recurrenten

Construction der Curven viele Varianten möglich sind, indem z. B. die Curve $r_1+r_2-r_3-r_4=a$ offenbar auch mit Hife der beiden Kegelschnitte $r_1+r_2=a+z$, $r_3+r_4=z$ construirbar ist etc.

Bei der directen Construction, bei beliebig grossem n, sollen nur die Curven mit durchweg positiven r betrachtet werden, bloss wegen grösserer Kürze, da auch der Fall von beliebig vielen negativen r keine zu grossen Schwierigkeiten bietet. Hier lässt sich nun die Fadenconstruction der Ellipse direct verallgemeinern und dadurch die Lösung herbeiführen. Denn ist $r_1+r_2+r_3=a$ z. B. in einem Zuge zu zeichnen, so nehme man einen biegsamen, undehnbaren Faden von der Länge $a+23$, wo 23 die Entfernung von 2 und 3 bezeichnet, und befestige das eine Ende, etwa durch Anbringung eines Knotens auf der unteren Zeichnungsfläche im Punkte 1. Führt man dann den Faden auf der oberen Zeichnungsfläche nach 2, in diesem Punkte auf die untere Seite und dort nach 3, wo er wieder nach Oben übertritt und befestigt an dem Ende etwa eine Spitze, so kann, wie Fig. 2 angibt, die geforderte Curve in einem Zuge gezeichnet werden, es braucht die Spitze sich nur so bewegen, dass die gesammte Fadenlänge in die vier geradlinigen Strecken $1M$, $2M$, 23 und $3M$ zerfällt, denn bei der Bewegung von M variirt die Länge von r_1, r_2, r_3 in Folge des Zuges von selbst und M beschreibt offenbar ein Oval. Fig. 3 gibt die Construction von $r_1+r_2+r_3+r_4=a$ etc., und man erkennt, dass z. B. bei $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=a$ die Gesammtlänge $a+23+45$ bei dem benützten Faden beträgt u. s. w. Um eine ungefähre Vorstellung derartiger Curven zu geben, ist in Fig. 4 die Curve 1). $r_1+r_2+r_3=a$ völlig construirt, wenn 1, 2, 3 die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes bilden. Es ist aber zu beachten, dass 1) bei der Rationalisirung allgemein zu einer Curve 8. Ordnung führt, wie sich bald zeigen wird, welche ausser dem Curvenzuge 1) — so hätte strenge genommen derselbe bezeichnet werden sollen — noch für den gewählten speciellen Werth von a die drei Curvenzüge

$$r_1+r_2-r_3=a, \quad r_1-r_2+r_3=a, \quad -r_1+r_2+r_3=a. \qquad 2')$$

besitzt und auch keinen weiteren, da jede durch O gezogene Gerade bereits in der grösstmöglichen Anzahl von Punkten, nämlich 8, schneidet. Dabei treten 6 Doppelpunkte α, β, γ, δ, ε, ζ

auf, da z. B. $r_1 - r_2 + r_3 = a$ und $-r_1 + r_2 + r_3 = a$ gleichzeitig befriedigt werden durch $\pm(r_1 - r_2) = 0$ und $r_3 = a$, d. h. man erhält zwei Doppelpunkte, wenn man den Kreis $r_3 = a$ schneidet mit der Geraden, welche auf 12 im Halbirungspunkte senkrecht errichtet ist. In Fig. 5 ist die Curve $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a$ völlig für einen gewissen Werth von a construirt, wenn die vier Punkte 1, 2, 3, 4 die Ecken eines Quadrates bilden. Es resultiren in diesem speciellen Falle fünf Ovale mit 12 Doppelpunkten $\alpha, \beta, \ldots \pi, \iota$, die man einfach construiren kann.

Es ist dabei nur zu beachten, dass die beiden Curvenzüge $\pm(r_1 - r_2) + r_3 + r_4 = a$, welche hier existiren, die beiden Schnittpunkte der Geraden $\pm(r_1 - r_2) = 0$ und des Kegelschnittes $r_3 + r_4 = a$ gemeinsam haben. Ein Umstand ist aber besonders zu erwähnen, erstens dass die Tangentenconstruction für jeden Curvenzug derselben rationalen Curve nach dem Vorzeichen der einzelnen r in der früher angegebenen Weise zu modificiren ist, und dass selbst bei festen Grundpunkten, z. B. vieren, die Gestalt der rationalen Curve — völlig in Analogie zu den Kegelschnitten — vielfach variirt, je nach dem Werthe von a, da z. B., wie Fig. 6 lehrt, auch 8 Curvenzüge auftreten können, von denen vier sich ins Unendliche erstrecken mit 12 reellen Doppelpunkten. Ich komme später hierauf zurück. Bei einer grösseren Anzahl von Fundamentalpunkten können, wie ich hier bemerke, noch höhere, im Endlichen gelegene vielfache Punkte auftreten, so kann z. B. bei $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 \pm r_5 = a$, wenn die drei Gleichungen

$$\pm(r_1 - r_2) = 0, \quad \pm(r_4 - r_3) = 0, \quad r_5 = a$$

gleichzeitig befriedigt werden können, wie sich aus

$$\pm(r_1 - r_2) \pm (r_3 - r_4) + r_5 = a$$

ergibt, ein vierfacher Punkt der Curve resultiren. Die beiden Figuren 5 und 6 lassen vermuthen, dass $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a$ rationalisirt auf eine Curve 10. Ordnung führt, entgegen der Vermuthung, dass sie von der Ordnung $2^4 = 16$ sei; allein es tritt in der That ein Zerfallen derselben ein, indem eine gewisse Gerade mehrfach mitzählt. Dieser Punkt kann erst später beleuchtet werden und führt wieder, wie anticipando bemerkt werden soll, auf ein zu den Kegelschnitten ganz analoges Verhalten. — Die

zu Fig. 5 analoge Fläche, wenn die vier Radienvectoren von den Eckpunkten eines Tetraëders ausgehen, besteht, wenn a innerhalb gewisser Grenzen liegt, offenbar aus fünf im Endlichen gelegenen Flächenzügen und besitzt sehr bemerkenswerthe im Folgenden erwähnte Eigenschaften. Vorläufig soll jedoch die Rationalisirung erledigt werden.

III.

Rationalisirung und Brennpunkte, sowie deren Vertheilung. Ist die Curve

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm \ldots \pm r_n - a = 0 \qquad 1)$$

zu rationalisiren, so setze man

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n - a = f(r_1, r_2, \ldots r_n)$$

und hat dann offenbar, um die Gleichung

$$r_1 + r_2 + \ldots r_n - a = 0$$

von der in r_1 befindlichen Quadratwurzel zu befreien, nur das Product $f(r_1, r_2, \ldots r_n) \cdot f(-r_1, r_2, \ldots r_n)$ zu bilden, um durch Nullsetzen desselben eine Gleichung zu gewinnen, welche nur mehr r_1^2 enthält. Die Gleichung 1) gibt daher, indem der eben geschilderte Process wiederholt wird, rationalisirt

$$\Pi f(\pm r_1, \pm r_2, \ldots \pm r_n) = 0, \qquad 2)$$

wobei das Product 2^n Factoren enthält, indem jede Zeichencombination in den r zu gebrauchen ist. Die Curve 1) wird daher rationalisirt allgemein von der Ordnung 2^n sein, wenn etwaige mehrfach zählende Theile bei etwaiger Zerfällung in geeigneter Multiplicität mitzählen. Aus dem Bisherigen ergibt sich jetzt, dass in der That z. B. die beiden Curvenzüge

$$r_1 + r_2 - r_3 - a = 0 \text{ und } r_1 - r_2 + r_3 - a = 0$$

als Theile derselben rationalen Curve aufzufassen sind, wie dies früher behauptet wurde. Ich will nun das Product in 2) für $n = 2$, 3, 4 wirklich bilden, da sich hieraus schon das Verfahren ergeben wird, um von dem Falle $n-1$ aus zu dem n übergehen und das Product 2) bis auf rein numerische Constante sofort hinschreiben

zu können. Die Bestimmung der erwähnten Constanten kann dann ohne Schwierigkeit auf vielfache Weise bewirkt werden. Wenn nun $r_1 + r_2 - a = 0$ zu rationalisiren ist, so hat man nach Obigem das Product zu bilden:

$$(r_1 + r_2 - a)(r_1 - r_2 - a)(-r_1 + r_2 - a)(-r_1 - r_2 - a) \qquad \alpha)$$

und dasselbe stellt, gleich Null gesetzt, die rationale Form dar.

Ich bilde das letztere offenbar auch, indem ich die Gleichung $r_1 + r_2 = a$ quadrire, wodurch resultirt $a^2 - r_1^2 - r_2^2 = 2r_1 r_2$, welche Gleichung auf Null reducirt, offenbar das Product aus dem ersten und vierten Factor in α) darstellt. Quadrire ich sie nochmals, d. h. multiplicire ich sie mit dem zweiten und dritten Factor von α), so ergibt sich

$$(a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 = 0 \qquad \beta)$$

die rationale Form der Kegelschnitte. Die Glieder mit dem grössten Exponenten in β) werden offenbar den Coëfficienten haben $(-1-1)^2 - 4 = 0$, wie man auch sofort aus der mit β) identischen Gleichung γ)

$$(r_1^2 - r_2^2)^2 - 2a^2(r_1^2 + r_2^2) = 0 \qquad \gamma)$$

erkennt, und dies heisst, die Gleichung β) stellt die doppeltzählende unendlich ferne Gerade und eine Curve zweiter Ordnung dar, die einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel natürlich sein kann, je nach der Lage der beiden Fundamentalpunkte, von welchen r_1 und r_2 ausgehen und dem Verhältnisse ihrer Distanz zu a, da dann z. B. der Curvenzug $r_1 + r_2 = a$ allein einen Sinn hat, also eine Ellipse vorliegt, oder die beiden Züge $r_1 - r_2 = a$ $-r_1 + r_2 = a$, also eine Hyperbel resultirt. Genau die analoge Erscheinung tritt bei mehreren Fundamentalpunkten auf und ebenso ein Zerfallen der rationalen Curve, wenn n eine gerade Zahl ist. Ehe ich zu $n = 3$ übergehe, will ich jedoch aus dem Producte 2) eine Folgerung ziehen. Dasselbe besteht aus 2^n Factoren, von denen 2^{n-1} das Glied $+r_1$ und 2^{n-1} das Glied $-r_1$ enthält. Das Product der ersteren soll mit $\varphi(+r_1, r_2, r_3 \ldots r_n)$ oder kurz $\varphi(+r_1)$, das der letzteren also mit $\varphi(-r_1)$ bezeichnet werden. Die Gleichung 2) lautet jetzt $\varphi(+r_1) . \varphi(-r_1) = 0$ und übergeht für $r_1 = \theta$ in $[\varphi(0, r_2, r_3, \ldots r_n)]^2 = \theta$, d. h. der Kegel-

schnitt $r_1 = 0$, welcher aus den beiden Geraden $y - b_1 \pm i(x - a_1) = 0$ besteht, berührt die Curve 1) allgemein 2^{n-1}mal, und da die beiden letzten Geraden offenbar durch die beiden Kreispunkte J_1 und J_2 hindurchgehen, so kann man von denselben, entsprechend den Gleichungen $r_1 = 0$, $r_2 = 0$. . $r_n = 0$, $2n$ im allgemeinen mehrfach berührende Tangenten ziehen. Sieht man von den mehrfach zählenden Kreispunkten, die ohnehin im Unendlichen liegen, ab, und combinirt die $2n$ erwähnten Tangenten zu paarweise conjugirten Geraden, so ergibt sich der Satz:

„Die Curve 1) hat die n Fundamentalpunkte zu reellen Brennpunkten und besitzt ausserdem noch $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare complex conjugirter ebenfalls im Endlichen gelegener Brennpunkte."

Was die Vertheilung der letzteren betrifft, so ergibt sich dieselbe auf folgende Weise: Wenn durch die Gleichung $\pm r_1 \pm r_2 = 2a$ eine Curve zweiter Ordnung definirt ist und die beiden Fundamentalpunkte haben die Coordinaten $y = 0$, so lauten nach Obigem die Gleichungen der vier Tangenten, die von den Kreispunkten ausgehen, offenbar $y \pm i(x \pm c) = 0$ und die Coordinaten der vier endlichen Brennpunkte sind offenbar

$$\begin{matrix} x = \pm c \\ y = 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x = 0, \\ y = \pm ci, \end{matrix}$$

d. h. sie bilden ein Quadrat in gewissem Sinne, das resultirt, wenn man die beiden reellen Brennpunkte verbindet und auf der Senkrechten im Halbirungspunkte die Strecken $\pm ci$ aufträgt. Dies gibt, da man bei der Curve 1) offenbar zwei beliebigen der n reellen Brennpunkte die Coordinaten $\frac{x = \pm c}{y = 0}$ beilegen kann, folgenden Satz über die Vertheilung der $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare conjugirter Brennpunkte:

„Um von den n reellen Brennpunkten zu den $\frac{n(n-1)}{2}$ Paaren complex conjugirten übergehen zu können, hat man dieselben nur zu $\frac{n(n-1)}{2}$ Paaren zu ordnen, und erhält zu jedem dieser reellen Paare ein complex conjugirtes, indem man auf der

Senkrechten im Halbirungspunkte ihrer Verbindungsstrecke sich diese halbe Strecke multiplicirt mit i nach beiden Seiten hin aufgetragen denkt."

Damit dürfte ein klares Bild über die Vertheilung der n^2 endlichen Brennpunkte gewonnen sein und ich bemerke nur, dass es scheint, als sollte jeder derselben eigentlich mit einer gewissen Multiplicität im Allgemeinen strenge genommen zählen, doch soll hierauf nicht eingegangen werden. Zu beachten ist jedoch, um zu dem Kegelschnitte zurückzukehren, die völlige Symmetrie beim Übergange von den zwei reellen zu den zwei complex conjugirten Brennpunkten und umgekehrt, und diese Symmetrie führte mich auf die Frage, ob man nicht durch die imaginären Brennpunkte die Ellipse z. B. ebenso definiren kann, wie durch die reellen. Dies trifft in der That zu, denn die Gleichung

$$\sqrt{x^2+(y-ci)^2}+\sqrt{x^2+(y+ci)^2}=2\sqrt{a^2-c^2}$$

gibt rationalisirt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

also dieselbe Ellipse und damit den mir persönlich neuen und sehr interessanten Satz:

„Bei der Ellipse und Hyperbel ist auch die Summe oder Differenz der von den imaginären Brennpunkten ausgehenden Radienvectoren constant, und zwar gleich der kleinen Achse."

Aus der früher gemachten Bemerkung, dass der Kegelschnitt $r_1^2=0$ die rationalisirte Curve 1) 2^{n-1}mal im Allgemeinen berührt, folgt z. B. unmittelbar, dass für die Curve

$$\pm r_1^3 \pm r_2^3 \pm {}_3^3 = a^3$$

eine gewisse Anzahl von Brennpunkten sofort angegeben werden kann, und dieses Ergebniss lässt sich noch bedeutend verallgemeinern, wenn man an Stelle von r_i eine Quadratwurzel aus einem in x und y beliebig hohen Ausdruck treten lässt. Man kann so algebraische Curven beliebig hohen Grades unmittelbar hinschreiben, die ein gewisses System im Endlichen gelegener Brennpunkte haben etc. Auch gelten die bisherigen Sätze in Bezug auf Brennpunkte offenbar noch bei Curven

$$f(r_1, r_2, \ldots r_n) = a,$$

wenn f keine algebraische Function der r ist, wenn nur in f lauter ungerade Potenzen von den r auftreten.

Ich kehre nun nochmals zur Bildung des Productes

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \cdot \quad \pm r_n - a) = 0 \qquad A)$$

zurück. Man hat für $n = 1$ sofort

$$\Pi(\pm r_1 - a) = a^2 - r_1^2 \qquad B)$$

und hat, um $\Pi(\pm r_1 \pm r_2 - a)$ zu bilden, nur zu beachten, dass dasselbe für $r_2 = 0$ in das Quadrat von B) übergeht, woraus folgt, dass dasselbe wegen der Symmetrie in r_1 und r_2 gleich ist $(a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 +$ Gliedern, die mit r_1 und r_2 gleichzeitig verschwinden, so dass man, weil nur gerade Potenzen der r auftreten können, sofort den Ansatz hat:

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 - a) = (a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 + C r_1^2 r_2^2,$$

worin C eine rein numerische Constante ist. Um C zu bestimmen, kann man in der letzten Gleichung, welche eine algebraische Identität ist, z. B. setzen $a = 0$ und erhält $C = -4$, so dass sich ergab

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 - a) = (a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2. \qquad C)$$

Für das Folgende ist nun die Bemerkung wichtig, dass das Product A) so beschaffen ist, dass a genau in derselben Weise sich verhält wie die r, denn es ist offenbar

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm \cdot \quad \cdot \pm r_n - a) = \Pi(r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm \ldots \pm r_n \pm a),$$

d. h. A) ist in $a, r_1, r_2, \ldots r_n$ symmetrisch und enthält nur die geraden Potenzen dieser Grössen.

Soll jetzt

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 - a)$$

gebildet werden, so hat man genau in derselben Weise wie für $n = 2$ schliessend, indem zuvor $r_3 = 0$ gesetzt und die eben erwähnte Symmetrie beachtet wird, unmittelbar den Ansatz:

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 - a) = \{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - C a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2$$

und erhält z. B. aus $r_1 = r_2 = r_3 = a = 1 \quad C = 64$, also ergibt sich

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 - a) = \{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4\Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - 64 a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2. \quad D)$$

Um jedes Bedenken gegen die Gleichung D), das etwa auftreten könnte, zu beheben, will ich dieses Resultat noch direct herleiten. Die Gleichung

$$r_1 + r_2 + r_3 = a$$

gibt quadrirt offenbar

$$2\Sigma r_1 r_2 = a^2 - \Sigma r_1^2$$

und derselbe Process nochmals angewendet, führt zur Gleichung

$$8 r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3) = (a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4\Sigma r_1^2 r_2^2$$

oder

$$8 a r_1 r_2 r_3 = (a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4\Sigma r_1^2 r_2^2$$

und daher resultirt durch nochmaliges Quadriren

$$\{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4\Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - 64 a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 = 0$$

die frühere Gleichung D). Wiederholt man genau dieselben Schlüsse, wie bisher — ich unterdrücke sie desshalb als überflüssig — so erhält man für $n = 4$ den Ansatz unmittelbar

$$\begin{aligned}\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 - a) = [\{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4\Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - 64 a^2 \Sigma r_1^2 r_2^2 r_3^2 \\ - 64 r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2]^2 - a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2 [\alpha(a^6 + \Sigma r_1^6) + \beta(a_4 \Sigma r_1^2 \\ + \Sigma r_1^4 r_2^2 + a^2 \Sigma r_1^4) + \delta(a^2 \Sigma r_1^2 r_2^2 + \Sigma r_1^2 r_2^2 r_3^2)], \quad E)\end{aligned}$$

worin nur mehr die rein numerischen Constanten α, β, δ zu bestimmen sind, was gar keine Schwierigkeit hat und was z. B. dadurch geschehen kann, dass man in der letzten Gleichung

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$$

setzt und in der resultirenden Gleichung die Coëfficienten der gleich hohen Potenzen von a gleichsetzt, oder in irgend welch anderer Weise, stets erhält man

$$\alpha = 2^{11},\ \beta = -2^{11},\ \delta = 2^{12},$$

wodurch in E) alles bestimmt ist. Genau in derselben Weise kann man von dem Falle $n-1$ zu dem n übergehen und sofort das

Product bis auf leicht zu bestimmende numerische Constanten ohne weiteres hinschreiben; ich gehe nur desshalb hierauf nicht näher ein, weil die Formeln offenbar sehr lang werden und bemerke nur, dass auch das Gesetz für die numerischen Coëfficienten keine wesentlichen Schwierigkeiten bieten dürfte.

Um jedoch die Fruchtbarkeit dieser Schlussweise an einem anderen Beispiele zu zeigen, soll die Gleichung

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+a=0$$

rationalisirt werden.

Setzt man $\sqrt[3]{A}=\rho_1$, $\sqrt[3]{B}=\rho_2$ und ist α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3=1$, so hat man, um die rationale Form zu gewinnen, bekanntlich das Product zu bilden

$$\prod_{\substack{i=1\\h=1}}^{\substack{i=3\\h=3}}(\alpha^i\rho_1+\alpha^h\rho_2+a).$$

Setzt man $\rho_2=0$ für einen Moment, so ergibt sich hiefür $(\rho_1^3+a^3)^3$, folglich hat man den Ansatz

$$\Pi(\alpha^i\rho_1+\alpha^h\rho_2+a)=(a^3+\rho_1^3+\rho_2^3)^3+Ca^3\rho_1^3\rho_2^3,$$

da die Symmetrie in den dritten Potenzen von a, ρ_1 und ρ_2 auch hier weiter besteht. Aus der Annahme $a=\rho_1=\rho_2$ ergibt sich $C=-27$, so dass die rationale Form lautet:

$$(a^3+A+B)^3-27a^3AB=0.$$

Ganz analog könnte jetzt $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}+a=0$ rationalisirt werden. Genau in derselben Weise gibt z. B., wenn r_1 und r_2 vierte Wurzeln sind, die Gleichung $r_1+r_2+a=0$ rationalisirt

$$(a^4+r_1^4+r_2^4)^4-8\Sigma a^{12}r_1^4-8a^4r_1^4r_2^4(a^4+r_1^4+r_2^4)=0 \text{ u. s. f.}$$

Überhaupt scheint es, dass die Verallgemeinung dieser Methode auf beliebig hohe Irrationalitäten keine erhebliche Mühe bereitet, indem gewisse Producte thatsächlich gebildet werden. Daraus ergibt sich auch die Verallgemeinerung der früheren Brennpunktsätze und der mehrfachen Berührung, z. B. der Curve $\sqrt[n]{U_1}+\sqrt[n]{U_2}-a=0$ durch die Curven $U_1=0$ und $U_2=0$ etc.

Es ist selbstverständlich, dass die Gleichungen C), D) und E) z. B., wenn unter r_i der Ausdruck $\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}$ verstanden wird, auch die rationale Form der früher angegebenen Flächen darstellen. Ich übergehe jetzt zu einigen Sätzen über die Gestalt etc. dieser Curven, da im weiteren Verlaufe an die Gleichungen D) und E) wieder angeknüpft wird.

IV.

Endliche und unendlich grosse Curvenzüge. Asymptoten und Asymptotenkegel. Was die Gestalt der Curvenzüge anbelangt, resp. ihre Existenz, so kann man folgenden Satz aufstellen. Wenn der Curvenzug $\pm r_1 \pm r_2 \pm \cdot \;\; \cdot \pm r_n - a = 0$ für eine gewisse Zeichencombination existirt, so liegt derselbe bei ungeradem n völlig im Endlichen, bildet also ein Oval, da er sich wegen der Eindeutigkeit der Tangentenconstruction nie selbst schneiden, also einen mehrfachen Punkt bilden kann. Die Erstreckung ins Unendliche ist also nur bei geradem n möglich und soll die Bedingung gleich dafür entwickelt werden. Ich zeige zu diesem Zwecke, dass r_i und r_h, wenn die beiden Punkte i und h eine endliche Distanz besitzen, immer gleichzeitig so unendlich werden, dass $\lim \frac{r_i}{r_h} = 1$ ist. In der That, es sei z. B. $r_h < r_i$, so beschreibe man um M mit r_h einen Kreis, und hat sofort (Fig. 7) $r_i = r_h + iN = r_h + \varepsilon . iS$ $= r_h + \varepsilon . ih . \cos\alpha$, woraus durch Division mit r_h, da ε ein echter Bruch ist, ih und $\cos\alpha$ stets endlich bleiben, folgt, dass in der Grenze für unendlich fernes M $\lim \frac{r_i}{r_h} = 1$ ist. Hiermit ist auch die Behauptung für den Fall eines ungeraden n erwiesen und die Möglichkeit unendlich grosser Curvenzüge bei geradem n allein dargethan. Der Kreis und Fig. 4, 5, 6 illustriren die einfachsten Fälle. Man erhält jetzt die Bedingung dafür, dass der Curvenzug A)

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm \cdot \;\; \cdot \pm r_{2n} - a = 0 \qquad A)$$

sich ins Unendliche wirklich erstreckt, sowie seine Asymptotenzichtungen auf folgende Weise. Zunächst ist wegen des obigen Grenzwerthes, da a als endliche Strecke angenommen wird, nothwendig, dass die Hälfte der r positives, die andere negatives Vorzeichen habe. Zu diesem Zwecke nehme ich z. B. den Curvenzweig

$$r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0 \qquad B)$$

und frage, wenn die vier reellen Brennpunkte im Endlichen liegen, welches ist der Maximalwerth von $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$, wobei die vier r die gegebenen vier Punkte mit einem beliebigen Punkte M der Ebene verbinden?

Aus dem Früheren ergibt sich, dass $(r_1 - r_2) + (r_3 - r_4)$ einen Maximalwerth — selbstverständlich einen positiven — annehmen wird, dann, und nur dann, wenn jeder der beiden Summanden $r_1 - r_2$ und $r_3 - r_4$ möglichst gross wird, was offenbar nur eintritt, wenn (Fig. 8) M ins Unendliche rückt; dann ist aber offenbar $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 12 \cos\alpha + 34 \cos\beta$, und es erübrigt noch die Bestimmung von α und β. Ich verfahre zu diesem Zwecke bloss rechnerisch zunächst und setze $12 = a$, $34 = b$. Dann ist also Fig. 9

$$y = r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = a \cos x + b \cos(\gamma - x)$$

zu einem Maximum zu machen. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \sin(\gamma - x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -[a \cos x + b \cos(\gamma - x)]$$

und erhält aus $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\sin x = \frac{b \sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}}$$

und für y den Maximalwerth $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$ bei unendlich fernem M. Dieser letzte Werth ist offenbar die schliessende Strecke, wenn a und b einfach wie Kräfte zusammengesetzt werden. Hiernach lässt sich vermuthen, dass die Function $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + r_5 - r_6$ zum Maximalwerthe die resultirende Strecke hat, wenn 12, 34 und 56 einfach nach dem Kräftepolygon zusammengesetzt werden, was die geometrische Analyse in der That sofort gibt. Denn nehme ich wieder z. B. nur vier Brennpunkte, die ich mit einem unendlich fernen Punkte M verbunden denke, so darf ich, ohne etwas an $r_3 - r_4$ zu ändern, diese Strecke parallel zu sich nach $24'$ verschieben und habe (Fig. 10) sofort $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = c + d$, d. h. gleich der Projection von

$$14' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \cos\gamma}$$

auf die Richtung 1 *M*.

Nun wird offenbar diese Projection ein Maximum, wenn 1 *M* mit 14′ zusammenfällt und damit ist bewiesen:

„Der Curvenzug $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0$ existirt und erstreckt sich ins Unendliche, wenn $a < 14'$."

Ich bemerke, dass die geometrische Überlegung, wenn man von $(r_1 - r_4) + (r_3 - r_2)$ ausgegangen wäre, wie eine leicht zu entwerfende Figur bestätigt, zu genau demselben Resultate geführt hätte, und so in der That nur ein Maximum, nämlich das obige für $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ resultiren würde. Auch die Asymptotenrichtungen lassen sich jetzt einfach angeben. Denn um z. B. für den Curvenzug $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0$, wo $a < 14'$ (Fig. 11) die letzteren zu finden, hat man in dem Kreise über l, der schliessenden Strecke von 12 und 34, als Durchmesser, von 1 aus nur die Sehnen a einzutragen, um durch 1 *U* und 1 *V* die Asymptotenrichtungen offenbar zu erhalten. Demnach ist bewiesen — und die ganze bisherige Überlegung überträgt sich sofort auf den Raum, also auf die Flächen $\pm r_1 \pm r_2 \pm \cdot \;\; \cdot \pm r_n - a = 0$ — dass z. B. der Zug $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0$ existirt und sich ins Unendliche erstreckt, wenn $a < 14'$ ist. Für $a = 14'$ liegt er völlig im Unendlichen. Ist aber $a < 14'$, so wird von $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ der Werth a auch im Endlichen erreicht und die Curve erstreckt sich nach zwei leicht construirbaren Richtungen ins Unendliche; weiter sind diese Asymptotenrichtungen auch dem Curvenzuge $r_2 - r_1 + r_4 - r_3 - a = 0$ gemeinsam und existirt derselbe genau unter derselben Bedingung, also beide immer gleichzeitig, ganz in Analogie zur Hyperbel. — Hieraus ergibt sich eine einfache Construction der Asymptoten bei der Hyperbel durch einen Kreis über 12 und zugleich, warum die Ellipse imaginäre Asymptoten hat.

Die Hyperbel als einfachster Fall, wenn eine gerade Anzahl von reellen Brennpunkten gegeben ist, führte mich auch auf folgenden hübschen Satz, dessen Beweis ich aber zur grösseren Kürze nicht in extenso gebe, sondern nur bemerke, dass derselbe mit Berücksichtigung der obigen parallelen Verschiebung der Strecken leicht zu erbringen ist. Dieser Satz lautet:

„Die zwei Curven, resp. Flächenzüge

$$\pm(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 \cdot \quad \cdot + r_{2n-1} - r_{2n}) = a$$

existiren stets gleichzeitig und erstrecken sich ins Unendliche, wobei sie zwei gemeinsame Asymptoten, resp. Asymptotenkegel besitzen, dann, und nur dann, wenn die schliessende Strecke l des aus 12, 34, (2^{n-1} 2^n) gebildeten offenen Polygons grösser als a ist. Die beiden gemeinsamen Asymptoten bilden mit l gleiche Winkel, und die Asymptotenkegel sind Kreiskegel, die man erhält, indem über l als Durchmesser eine Kugel beschrieben wird und in dieselbe von dem einen Endpunkte der Strecke l aus alle Sehnen gleich a eingetragen werden, d. h. der Öffnungswinkel dieser Kegel ist durch die Gleichung bestimmt, $\cos\alpha = \frac{a}{l}$. Weiter erhält man genau auf dieselbe Weise die Asymptotenrichtungen und Asymptotenkegel, z. B. bei jeder Permutation der r — die Hälfte muss positiv sein, die andere negativ — durch das analoge offene Polygon, und es erübrigt zur völligen Bestimmung der sämmtlichen Asymptoten, resp. Asymptotenkegelpaare, nur mehr die Angabe des Scheitels derselben.“ Dieser Scheitel ist nun für alle möglichen Züge derselbe, nämlich der Schwerpunkt des aus den reellen Brennpunkten bestehenden Punktsystems. Das Rotationshyperboloid ist wie die Hyperbel eine Illustration des einfachsten Falles. Die angegebenen Curven und Flächen, deren Ordnung offenbar beliebig hoch gemacht werden kann, dürften die einzigen bekannten algebraischen sein, deren Asymptoten stets auf die angegebene Weise sich einfach construiren lassen.

Ehe ich zum letzten Abschnitte dieser Abtheilung übergehe, will ich die Bedingung ermitteln, wann bei vier gegebenen Brennpunkten das Oval $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a$ existirt. Die vier Punkte 1, 2, 3, 4 bilden — es sind alle r positiv zu nehmen — ein Viereck, z. B. Fig. 12. Es fragt sich, für welche Lage von M wird $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ ein Minimum? Es sei M ein beliebiger Punkt der Ebene, so denke ich mir die Ellipse beschrieben, welche 3 und 4 zu Brennpunkten hat und deren grosse Achse $3M + 4M$ ist. Verschiebe ich M auf dieser Ellipse nach N, auf die Gerade 12, so bleibt $r_3 + r_4$ dabei constant, allein $r_1 + r_2$ nimmt offenbar ab, also die ganze Summe $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ nimmt bei dieser

Verschiebung ab. Verschiebe ich jetzt N nach O, so bleibt r_1+r_2 constant und r_3+r_4 nimmt ab und wird offenbar in O am kleinsten, d. h. im Punkte O hat die Summe $r_1+r_2+r_3+r_4$ den Maximalwerth erreicht. Setzt man jetzt $1O+2O+3O+4O=m$, so dass m eine gegebene Strecke ist, so zieht sich offenbar das Oval $r_1+r_2+r_3+r_4=a$, wenn $a=m$ ist, auf den Punkt O zusammen und existirt für Werthe von a, die kleiner als m sind, nicht, — es existiren dann andere Züge der Curve $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a$, welche sonst nicht existiren; ist dagegen $a>m$, so existirt dieses Oval und umschliesst den Punkt O, indem es sich mit zunehmendem a gleichzeitig erweitert.

V.

Ebene Krümmungscurven auf gewissen Flächen, die Transformationen in sich zulassen. Punkte, durch welche mehr als zwei Krümmungscurven hindurchgehen. — Nimmt man die vier Eckpunkte eines regelmässigen Tetraëders als Ausgangspunkte der vier r an, und lässt den Punkt xyz sich so bewegen, dass die Gleichung α) stets erfüllt wird

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a, \qquad \alpha)$$

so erhält man die in III. Gleichung E) rationalisirte Fläche. Dieselbe ist sehr wahrscheinlich von der 10. Ordnung und besteht, wenn a geeignet gewählt ist (vergl. Fig. 5), aus fünf völlig im Endlichen gelegenen Flächenzügen, nämlich

$$r_1+r_2+r_3+r_4=a \text{ I}); \quad r_1+r_2+r_3-r_4=a \text{ II});$$
$$r_1+r_2-r_3+r_4=a \text{ III}); \quad r_1-r_2+r_3+r_4=a \text{ IV});$$
$$-r_1+r_2+r_3+r_4=a \text{ V}).$$

Diese fünf Flächenzüge durchsetzen sich in sechs Ellipsen, nämlich

II und III	in der Ellipse	$r_1+r_2=a,$	$\pm(r_3-r_4)=0$
II „ IV	„ „	$r_1+r_3=a,$	$\pm(r_2-r_4)=0$
II „ V	„ „	$r_2+r_3=a,$	$\pm(r_1-r_4)=0$
III „ IV	„ „	$r_1+r_4=a,$	$\pm(r_2-r_3)=0$
III „ V	„ „	$r_2+r_4=a,$	$\pm(r_1-r_3)=0$
IV „ V	„ „	$r_3+r_4=a,$	$\pm(r_1-r_2)=0$

Für die Fläche α) gilt die früher bewiesene Normalenconstruction, und es ergibt sich hieraus Folgendes: Denkt man sich die sämmtlichen Symmetrieebenen des Tetraëders, so schneidet jede den Flächenzug I in einer ebenen Krümmungscurve, weil für jeden Punkt der Schnittcurve die Normale in dieser Ebene bleibt, sämmtliche Normalen sich also successive schneiden, wodurch ja bekanntlich eine Krümmungscurve definirt ist. Man erhält hiedurch auf den Flächenzug I sechs ebene Krümmungscurven, die sich in acht Punkten zu je dreien — entsprechend den vier Eckpunkten des Tetraëders und den vier Mittelpunkten der Seitenflächen — schneiden, und in sechs Punkten — entsprechend den Mittelpunkten der Kanten — zu je zweien schneiden. Die drei Symmetrieebenen, welche durch den Punkt 1 gehen, bestimmen aber offenbar auf dem Flächenzuge V ebenfalls drei ebene Krümmungscurven, die sich in zwei Punkten zu je dreien schneiden — entsprechend dem Punkte 1 und dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraëders — und Analoges gilt für die Züge II, III und IV. Demnach erhält man auf der Fläche α) im Ganzen 18 ebene Krümmungcurven, die sich in 16 Punkten zu je dreien und sechs Punkten zu je zweien schneiden, und zwar unter gleichen Winkeln. Durch die angegebenen 16 Punkte gehen noch drei weitere, aber nicht mehr ebene Krümmungscurven — die obige Normalenconstruction gibt dies einfach und führte mich mein geehrter Lehrer Prof. F. Lippich darauf — so dass auch hier sämmtliche Krümmungslinien in den erwähnten singulären Punkten sich unter gleichen Winkeln schneiden, ebenso wie der Satz erhalten bleibt, dass längs jeder ebenen Krümmungscurve die Tangentialebene der Fläche mit der ersteren einen constanten Winkel bildet, hier 90°

Die Fläche α) übergeht ferner offenbar bei den bekannten 12 Rotationen des Tetraëders — vergl. z. B. mein Octaëder in dem XLI. Bande der Denkschriften der kaiserlichen Akademie in Wien — in sich selbst, d. h. α) ist in sich selbst transformirbar. Genau in derselben Weise kann man, von den übrigen vier regelmässigen Körpern ausgehend, die Flächen erhalten

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 \pm r_5 \pm r_6 = a \quad \beta) \text{ beim Octaëder,}$$
$$\pm r_1 \pm r_2 \pm \cdot \quad \cdot \pm r_{12} = a \quad \gamma) \text{ beim Ikosaëder,}$$

$\pm r_1 \pm r_2 \pm \cdot \qquad \pm r_8 = a$ δ) beim Hexaëder,
$\pm r_1 \pm r_2 \pm \cdot \qquad \cdot \pm r_{20} = a$ ε) beim Dodekaëder.

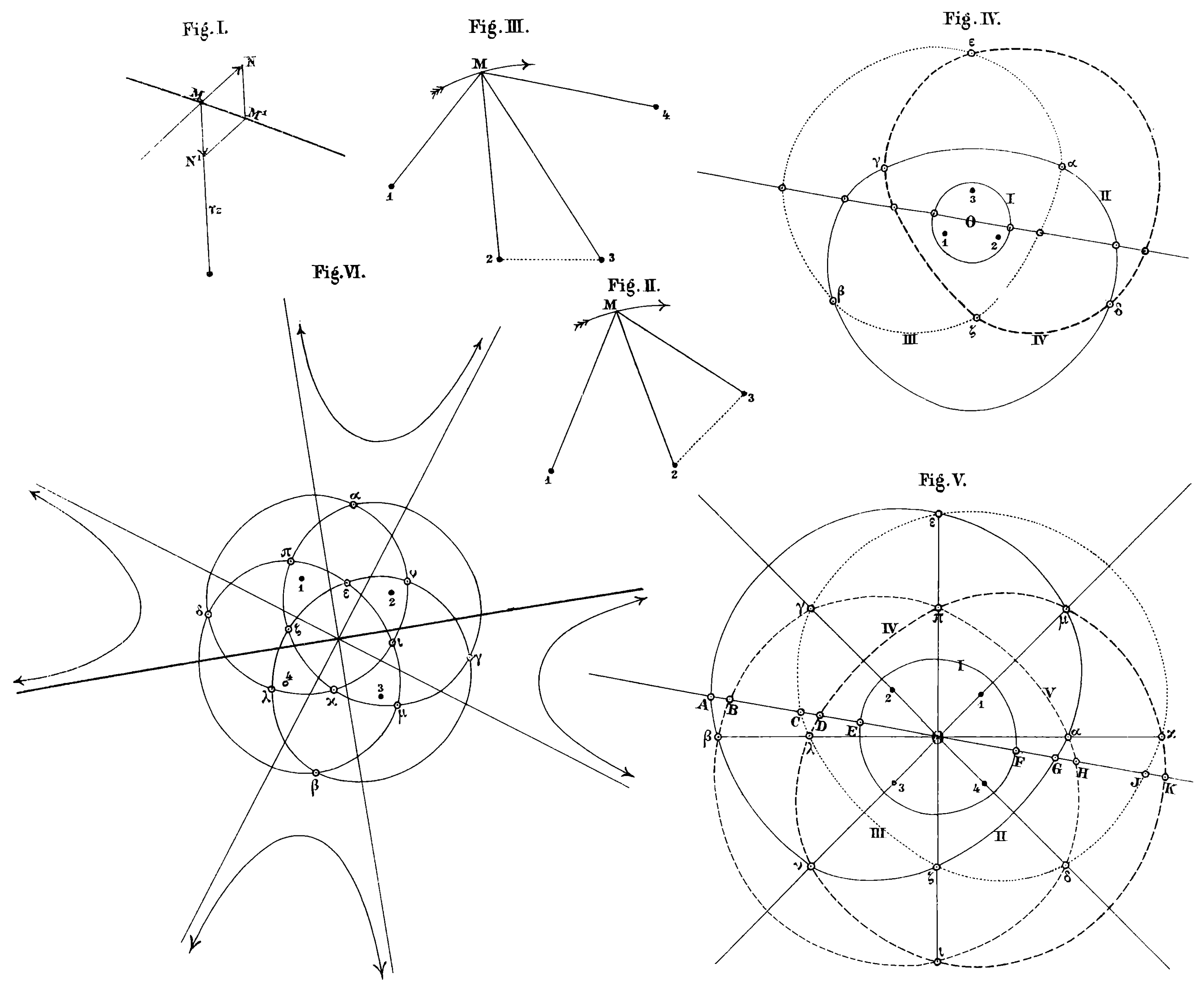
Man hat dann algebraische Flächen mit Transformationen in sich selbst, bei denen ebene Krümmungscurven auftreten, die sich in gewissen singulären Punkten zu je zweien, dreien, vieren und fünfen schneiden und die ich später genauer zu untersuchen gedenke. Die angegebenen Flächen haben, um im Sinne meines geehrten Lehrers Prof. Dr. F. Klein in Leipzig zu sprechen, den Typus der regelmässigen Körper.

Man kann jedoch auch solche mit dem Typus der Pyramiden sofort construiren, indem man von den Eckpunkten eines regelmässigen ebenen Polygons ausgeht und dann hat die Fläche ζ), die von der 8. Ordnung ist, ihre rationale Gleichung ist in III *D*),

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 = a$$

ebenfalls ebene Krümmungscurven und zwar hat der Flächenzug $r_1 + r_2 + r_3 = a$ vier ebene Krümmungscurven, und die Züge $r_1 + r_2 - r_3 = a$, $r_1 - r_2 + r_3 = a$, $-r_1 + r_2 + r_3 = a$ je eine.

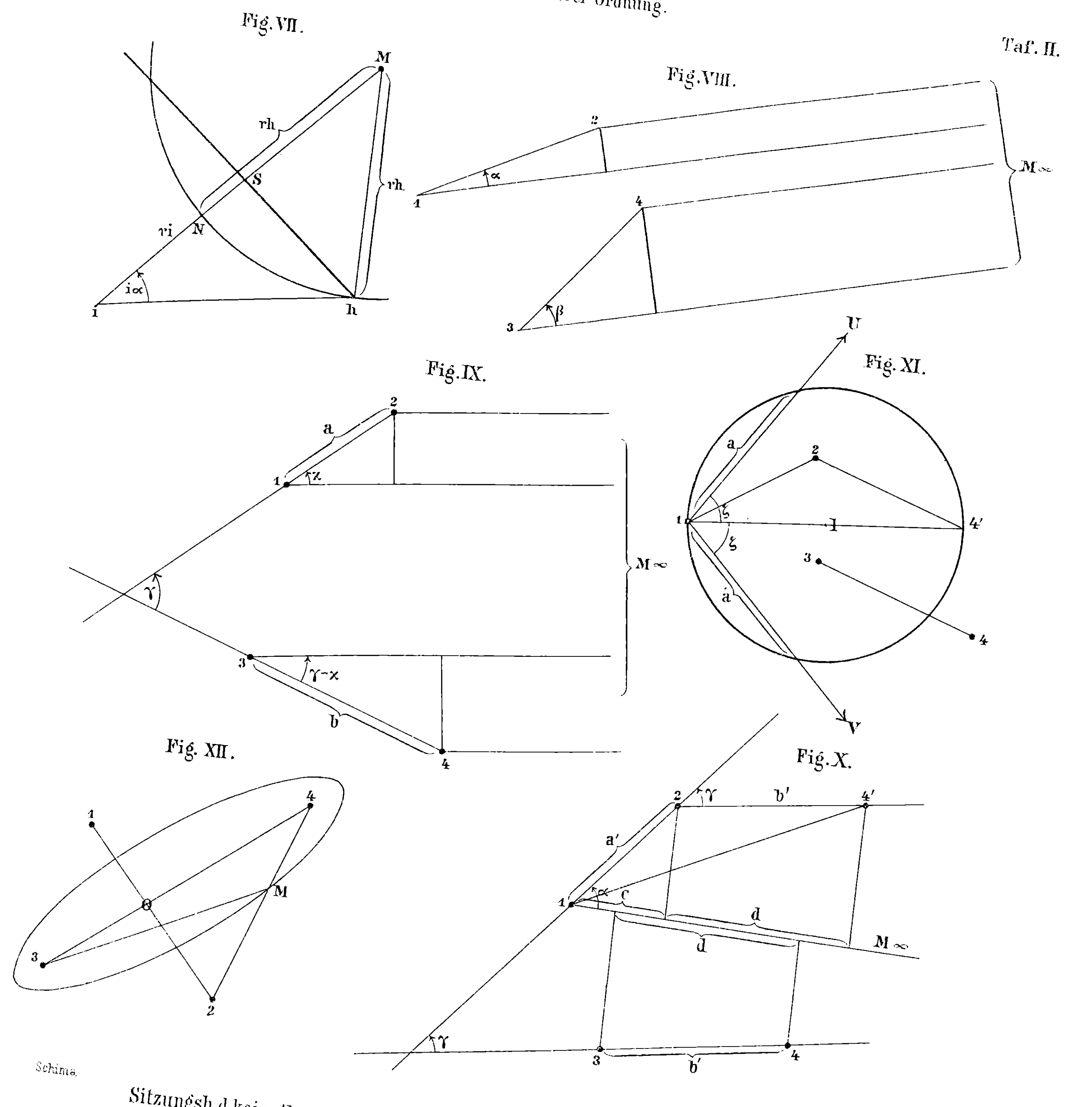
Auf dem ersten Zuge liegen weiter zwei Punkte, durch welche drei ebene Krümmungscurven hindurchgehen u. s. f., kurz es liegt auf der Hand, dass man so algebraische Flächen construiren kann, bei denen durch zwei Punkte beliebig viele und zwar ebene Krümmungscurven hindurchgehen.



Druck v. J. Wagner in Wien.

Puchta Mechanisch erzeugbare Curven u. Flächen höherer Ordnung.

Taf. II.



Schima.

Druck v. J. Wagn.